

# DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

## •• MATEMÁTICAS – GRADO 10 ••

**1** Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros  $a/b$ . Por ejemplo, conoce una demostración del hecho de que  $\sqrt{2}$  no es racional.

Suponer que  $\sqrt{2}$  se escribe como una fracción lleva a una contradicción.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 2b^2 = a^2$$

En cualquier número al cuadrado el número de primos en que se descompone es par (si descompone cualquier número en primos y se eleva al cuadrado, entonces cada primo se elevará al cuadrado). Por lo tanto en  $a^2$  y en  $b^2$  hay un número par de 2's. Así en el lado izquierdo de la última ecuación ( $2b^2$ ) hay un número impar de 2's, mientras que en lado derecho ( $a^2$ ) hay un número par de 2's. Esto muestra que esos dos lados no pueden ser iguales y, por lo tanto,  $\sqrt{2}$  no puede inscribirse como una fracción.

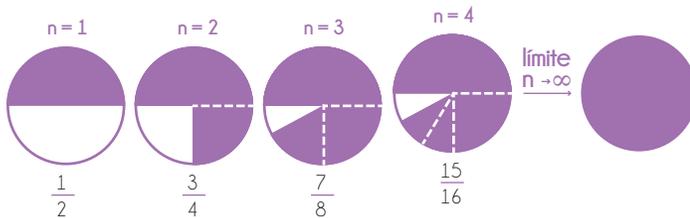
Expresa un número racional con expansión decimal periódica o finita como una fracción. Reconoce que todo número (racional o irracional) tiene una expansión decimal y encuentra una sucesión de racionales que lo aproxima. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 2,4 & 2,43 & 2,429 & 2,4286 & 2,42857 & \dots & \rightarrow \frac{17}{7} \\ 1 & 1,4 & 1,41 & 1,414 & 1,4142 & 1,41421 & \dots & \rightarrow \sqrt{2} \end{array}$$

Reconoce que los números racionales tienen expansión decimal que es finita o infinita eventualmente periódica, mientras que para los irracionales es infinita y no periódica.

**2** Comprende el concepto de límite de una sucesión.

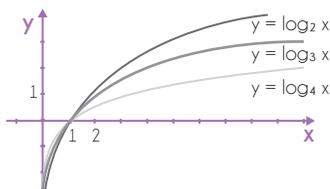
- Imagine que sombrea medio círculo, después la mitad de lo que estaba sin sombreado, y así sucesivamente. ¿Qué porción del círculo ha sombreado en cada paso y cuál es el límite si continúa indefinidamente?



n	1	2	3	4	...
Porción del círculo coloreada:	$\frac{2^1 - 1}{2^1}$	$\frac{2^2 - 1}{2^2}$	$\frac{2^3 - 1}{2^3}$	$\frac{2^4 - 1}{2^4}$	...
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8} + \frac{1}{16}$	...
		= 0,75	= 0,874	= 0,9375	...

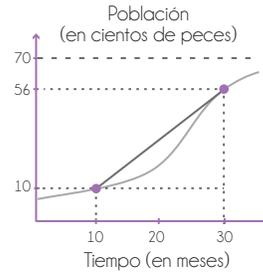
Si continuamos este proceso indefinidamente, la porción del círculo sombreada estará cada vez más cerca del círculo completo.

**3** Reconoce la familia de funciones logarítmicas  $f(x) = \log_a(x)$  junto con su dominio, rango, propiedades y gráficas.



- El punto de corte con el eje x es 1.
- A medida que x aumenta, el valor de la función aumenta.
- El dominio es  $(0, \infty)$ .
- El rango es el conjunto de los números reales.

**4** Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula. Por ejemplo, la gráfica muestra la cantidad de peces en un lago luego de haber introducido 800 especímenes.



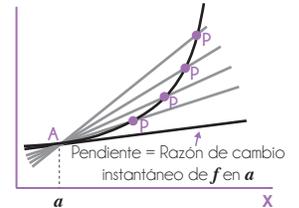
La razón de cambio promedio entre los meses 10 y 30 está dada por:

$$\begin{aligned} \text{razón de cambio promedio} &= \frac{\text{cambio en población}}{\text{cambio en tiempo}} \\ &= \frac{5600 \text{ peces} - 1000 \text{ peces}}{20 \text{ meses}} \\ &= 510 \text{ peces/mes} \end{aligned}$$

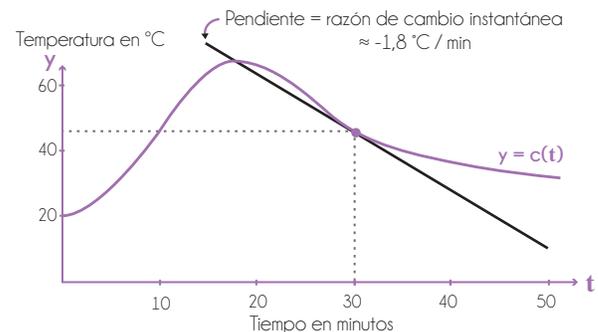
La razón de cambio promedio es una aproximación al cambio real pero en muchas ocasiones no lo refleja con precisión. Por ejemplo, entre el mes 10 y el mes 11 la población creció menos que 510 peces y entre el mes 25 y 26 la población creció más que 510 peces. Sin embargo, al cabo de los 20 meses (entre el mes 10 y el 30) el cambio en la población fue igual al que se hubiera producido si la población hubiese crecido exactamente 510 peces cada mes.

**5** Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto  $x=a$ :

- Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A.
- Como el valor al que tienden las razones de cambio promedio de la función entre  $x=a$  y puntos cada vez más cercanos a éste.



Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra la temperatura  $C(t)$  de una sopa que se colocó sobre un fogón durante 20 minutos y después se retiró para que se enfriara.

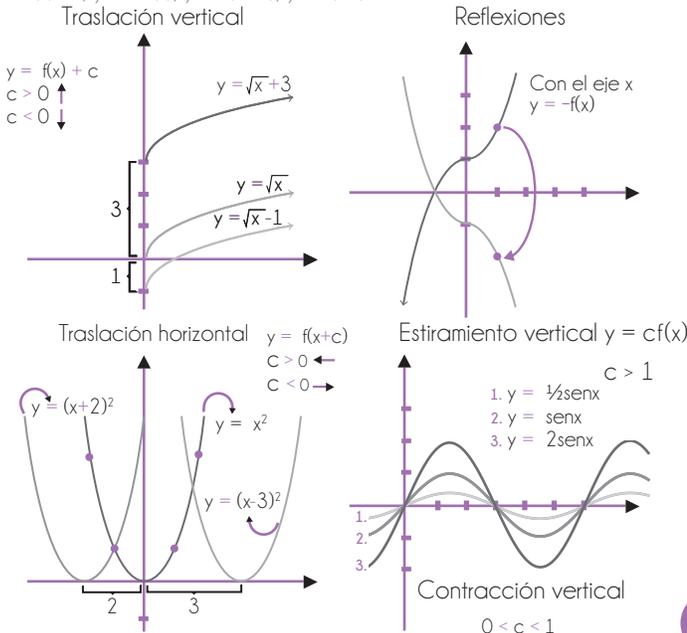


La pendiente de la tangente en  $(30, C(30))$  es aproximadamente  $-1,8^\circ\text{C}/\text{min}$ , lo cual significa que la razón de cambio instantáneo de la temperatura con respecto al tiempo en  $t=30$  es de  $-1,8^\circ\text{C}/\text{min}$ . Es decir, alrededor de  $t=30$  minutos, la temperatura disminuyó aproximadamente  $1,8^\circ\text{C}$  cada minuto.

# DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

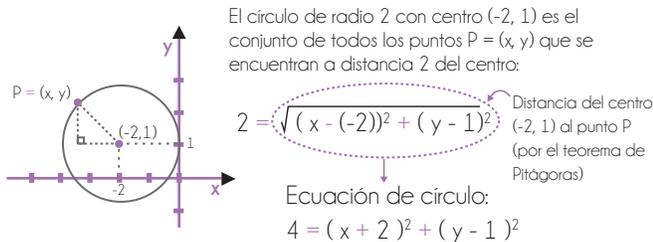
## MATEMÁTICAS – GRADO 10

**6** Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebraica presenta variaciones como:  $y = f(x)+a$ ,  $y = bf(x)$ ,  $y = f(x+c)$ ,  $y = f(dx)$ .

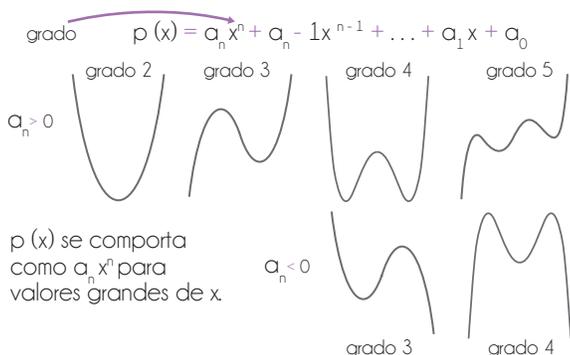


**7** Soluciona problemas geométricos en el plano cartesiano. Por ejemplo, encuentra las coordenadas del punto medio entre dos puntos, encuentra la distancia entre dos puntos, determina cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares, determina cuándo tres puntos son colineales o encuentra la ecuación de un círculo de radio  $r$  con centro  $(a,b)$ .

• ¿Cuál es la ecuación de un círculo de radio 2 con centro  $(-2,1)$ ?



**8** Reconoce características generales de las gráficas de las funciones polinómicas observando regularidades.



Suma, resta, multiplica y divide polinomios. Reconoce que un número "a" es una raíz de un polinomio  $p(x)$  si y sólo si  $(x-a)$  es un factor de  $p(x)$  y utiliza este hecho para factorizar polinomios simples.

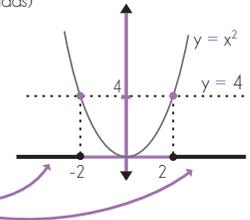
**9** Soluciona inecuaciones del tipo  $f(x) > 3$  o  $f(x) \leq g(x)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones dadas de forma gráfica o algebraica. Por ejemplo:

• Los ingresos y los costos que genera una fábrica de zapatos están dados en función del número de unidades que produce y vende. Las ganancias de la empresa son la diferencia entre los ingresos y los costos.



• Soluciona la inecuación  $x^2 \geq 4$ .

$x^2$  es mayor o igual a 4 en estos dos intervalos:  
 Solución:  
 $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



**10** Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal. Por ejemplo:

• ¿Cuál de las siguientes funciones podría ser una función lineal y cuál una función exponencial?

• La función  $f(x)$  no puede ser lineal porque a cambios constantes de  $x$  (incrementa 1), los valores de  $f(x)$  no están variando de forma aditiva. Revisando los cocientes entre los valores de  $f(x)$  se ve que para pasar de un valor a otro siempre se multiplica por 1,5. Así,  $f(x)$  parece ser una función exponencial de la forma  $f(x) = 36(1,5)^x$ .

• La función  $g(x)$  no puede ser ni exponencial ni lineal porque crece y decrece. Las funciones exponenciales y lineales siempre crecen o siempre decrecen.

• La función  $h(x)$  presenta cambios aditivos constantes (restar 3) cuando  $x$  incrementa 1. Así,  $h(x)$  parece ser una función lineal de la forma  $h(x) = 42 - 3x$ .

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
-2	16	15	48
-1	24	20	45
0	36	23	42
1	54	24	39
2	81	21	36

• El precio de un carro antiguo en el año 1995 era 8 millones, y en el año 2015 es 24 millones. ¿Cuál será el precio del carro en el año 2035 si se asume que éste crece de manera exponencial o lineal?

• Si se asume crecimiento lineal y se toma  $t$  como el tiempo en años desde el año 1995, entonces el precio del carro en millones es:

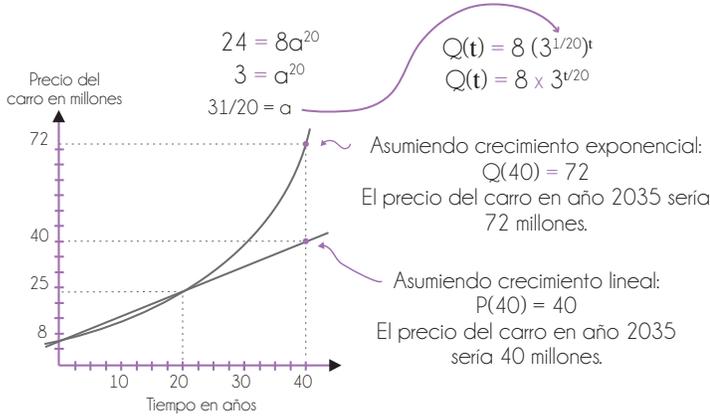
$$P(t) = 8 + 0,8t$$

Razón de cambio constante =  $\frac{\text{Cambio en precio}}{\text{Número de meses}} = \frac{24 - 8}{20} = 0,8$  millones de pesos / año

# DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

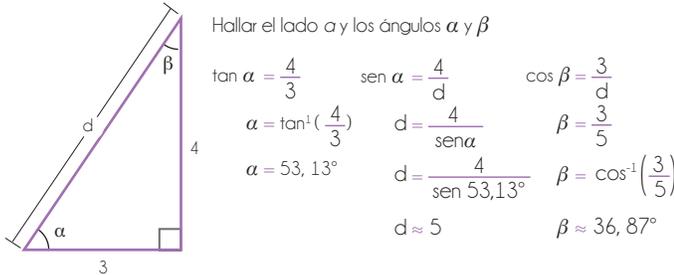
## MATEMÁTICAS – GRADO 10

- Si se asume crecimiento exponencial, la función que modela el precio en millones sería de la forma  $Q(t) = 8a^t$  (pues  $Q(0) = 8$  millones). Como  $Q(20) = 24$  millones, se obtiene:



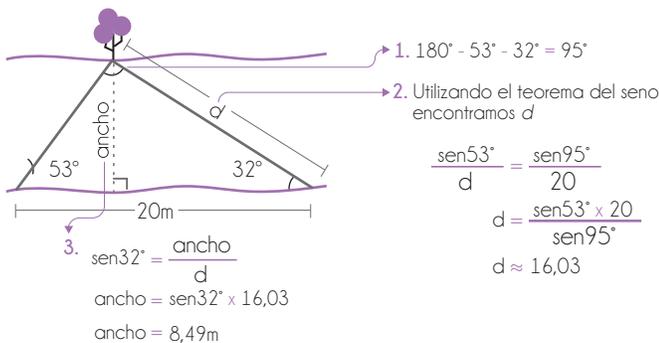
- 11** Utiliza calculadoras y software para encontrar un ángulo en un triángulo rectángulo conociendo su seno, coseno o tangente. Por ejemplo:

- Soluciona ecuaciones del tipo  $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{7}$  (utilizando la tecla de seno inverso en la calculadora).
- Dados dos lados en un triángulo rectángulo, encuentra el lado restante y todos los ángulos.



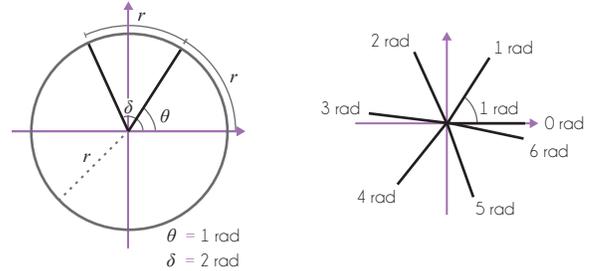
- 12** Comprende y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos. Por ejemplo:

Calcula la distancia a un objeto lejano o inalcanzable utilizando la ley del seno. Se quiere conocer el ancho de un río, para lo cual un observador se sitúa justo en una de las orillas y estima que el ángulo entre la dirección del río y un árbol que observa en la otra orilla mide  $53^\circ$ . El observador camina 20m como se muestra en la figura y al observar de nuevo el árbol el ángulo es ahora de  $32^\circ$ . ¿Cuál es el ancho del río?



El ancho del río es aproximadamente 8,49m

- 13** Reconoce el radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico.



Realiza conversiones entre grados y radianes. Por ejemplo:

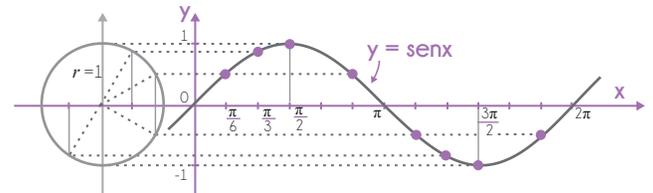
$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 1$$

$$3 \text{ rad} = 3 \text{ rad} \times \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = \left(\frac{3 \times 360}{2\pi}\right)^\circ \approx 172^\circ$$

Halla la longitud de un segmento de circunferencia y el área de un sector de círculo (por ejemplo, utilizando proporcionalidad).

- 14** Comprende la definición de las funciones trigonométricas  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$ , en las cuales  $x$  puede ser cualquier número real y calcula, a partir del círculo unitario, el valor aproximado de  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$ . También traza sus gráficas e identifica sus propiedades (rango, dominio y periodo).



- La función seno es periódica con periodo  $2\pi$ .
- El dominio de la función seno es el conjunto de todos los reales.
- El rango es  $[-1, 1]$  ya que el valor máximo que puede tomar la función es 1 y el mínimo es -1.

Comprende por qué  $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$  y deduce otras identidades entre funciones trigonométricas.

- 15** Utiliza el sistema de coordenadas polares y realiza conversiones entre éste y el sistema cartesiano, haciendo uso de argumentos geométricos y de sus conocimientos sobre las funciones trigonométricas. Reconoce fortalezas y debilidades de este sistema de coordenadas.

- El punto con coordenadas cartesianas (4,4) tiene infinitas coordenadas polares.

$$(r, \theta) = (4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (4\sqrt{2}, \frac{-7\pi}{4}) = (4\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4}) = \dots$$

$$45^\circ = 45^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

- Una misma curva puede tener una ecuación simple o compleja dependiendo del sistema de coordenadas escogido.

# DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

## • MATEMÁTICAS – GRADO 10 •

16

Calcula e interpreta la probabilidad de que un evento ocurra o no ocurra en situaciones que involucran conteos con combinaciones y permutaciones. Por ejemplo:

- Una lotería se juega con 45 balotas marcadas del 1 al 45 en la que cada concursante elige seis de éstas. El premio se otorga a las personas que acierten las seis balotas en cualquier orden. ¿Cuál es la probabilidad que una persona obtenga el premio?

El **espacio muestral** es el conjunto de todas las selecciones de seis balotas de las cuarenta y cinco (sin contar el orden). Hay 45 combinado 6 posibles elecciones de esas seis balotas. Si A es el evento de acertar las seis balotas, tenemos que:

$$P(A) = \frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8145060} \approx 0,000012\% \quad \binom{45}{6} = \frac{45!}{6!(45-6)!} = 8\,145\,060$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

La probabilidad de que una persona obtenga el premio es aproximadamente 1 en 8 millones.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar cinco cartas de una baraja y que no salgan corazones?

El espacio muestral es el conjunto de todas las posibles formas de seleccionar cinco cartas de una baraja. Su tamaño es  $\binom{52}{5}$  pues se están eligiendo 5 cartas de una baraja que tiene un total de 52 sin que importe el orden.

elegidas de las 39 cartas que nos son corazones

$$\text{Probabilidad de elegir cinco cartas que no sean corazones} = \frac{\text{Número de elecciones de cinco cartas que no incluyen corazones}}{\text{Número de elecciones de cinco cartas}} = \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 22\%$$

Entiende y utiliza la relación entre la probabilidad de que un evento ocurra y la probabilidad de que no ocurra:

$P(A) + P(A^c) = 1$ . Por ejemplo:

- Se lanza una moneda 7 veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga sello al menos una vez? El espacio muestral es el conjunto de todas las posibilidades. En este caso, éstas se pueden codificar como cadenas de siete letras utilizando las letras C (cara) y S (sello), por ejemplo CCSCSSS es un elemento de espacio muestral que corresponde a tres caras y cuatro sellos en un orden particular. El evento A, de las posibilidades en que sale sello al menos una vez, es el conjunto de todas las cadenas de letras que tienen al menos una S. Es más fácil calcular la probabilidad de que no ocurra A (la probabilidad de complemento de A) pues el complemento de A es el conjunto de las cadenas que no tienen ninguna S (sólo hay una cadena entre las 27 opciones: CCCCCC). Así,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{27} \approx 99,2\%$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que en una fiesta de 40 personas al menos dos personas cumplan el mismo día (es decir, mismo día y mes)? Es más fácil calcular la probabilidad de que ese evento no ocurra, pues esto corresponde al evento que todos tengan fechas de cumpleaños distintas, la cual se puede calcular utilizando permutaciones:

# de opciones para el cumpleaños de la primera persona      # de opciones para el cumpleaños de la segunda persona (debe ser distinto al de la primera)

$$\text{Probabilidad de que todos tengan cumpleaños distintos} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 326}{365^{40}} = \frac{365! / 325!}{365^{40}}$$

# de posibilidades para los cumpleaños de 40 personas (sin importar si estos se repiten o no)

Probabilidad de que haya al menos dos cumpleaños iguales =  $1 - \text{Probabilidad de que todos tengan cumpleaños distintos} = 1 - \frac{365! / 325!}{365^{40}} \approx 0,89123 \dots \approx 89\%$

Por lo tanto, la probabilidad de que en una fiesta de 40 personas al menos dos personas cumplan el mismo día es aproximadamente 89%.

Reconoce la relación de los conectores lógicos "y" y "o" entre eventos y las operaciones entre los conjuntos correspondientes ("y" corresponde a intersección y "o" corresponde a unión).

Comprende y utiliza la fórmula general para la probabilidad de que ocurran los eventos A o B. Por ejemplo:

Ocurren los eventos A o B

Ocurren los eventos A y B



En  $P(A) + P(B)$  se está sumando dos veces  $P(A \cap B)$ , luego

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja, salga una Q o una K? Sea A el evento de que salga una K y B el evento de que salga una Q. Hay cuatro K y cuatro Q en las 52 cartas.  $A \cap B$  es vacío, pues no puede salir al mismo tiempo una Q y una K si se elige sólo una carta. Así,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 \approx 15,4\%$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja salga una Q o una K? El espacio muestral es el conjunto de todas las selecciones de dos cartas en una baraja de 52 (sin contar el orden). Hay  $\binom{52}{2}$  posibles elecciones de dos cartas. Sea A el evento de que salga una K y B el evento de que salga una Q. En esta ocasión  $A \cap B$  no es vacío, consiste precisamente de todas las elecciones de una Q y una K.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4 \times 51}{\binom{52}{2}} + \frac{4 \times 51}{\binom{52}{2}} - \frac{4 \times 4}{\binom{52}{2}} \approx 30\%$$

El número de elecciones de dos cartas que tienen una Q es:

# de elecciones de la Q entre las 4 que hay      # de elecciones para la otra carta (puede ser cualquiera)

$$4 \times 51$$

17

Calcula y utiliza los percentiles para describir la posición de un dato con respecto a otros. En particular, entiende que la mediana corresponde al percentil 50 y comprende cómo los percentiles ayudan a reconocer la distribución de los datos. Por ejemplo:

- Que la mediana de los salarios de cierta ciudad, sea 2 millones de pesos significa que la mitad de las personas tienen un salario inferior a 2 millones, y que el percentil 75 sea 2,5 millones, significa que el 25% de la población de dicha ciudad tiene un salario superior a 2,5 millones.
- Andrés consultó sus resultados de la prueba Saber 11 y fue informado que en la prueba de matemáticas está ubicado en el percentil 56. Esto significa que el 56% de todos los estudiantes que presentaron la prueba en el país obtuvieron un puntaje menor al suyo.

# DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE

•• MATEMÁTICAS – GRADO 10 ••

18

---

---

---

---

---

21

---

---

---

---

---

19

---

---

---

---

---

22

---

---

---

---

---

20

---

---

---

---

---

23

---

---

---

---

---